

Chapitre 1

Cadre théorique de la diffusion Compton virtuelle en régime profondément inélastique

Ce premier chapitre a pour but de présenter la diffusion Compton virtuelle en régime profondément inélastique, le cadre théorique et les études expérimentales associés. Dans une première partie les variables cinématiques de la diffusion Compton virtuelle sont définies puis les expressions des amplitudes associées sont dérivées. La limite profondément inélastique est alors explicitée et ses conséquences sur la diffusion Compton virtuelle sont étudiées. L'amplitude dominante dans cette limite est développée pour aboutir à l'introduction des distributions de partons généralisées. Les propriétés et les horizons ouverts par ces nouvelles distributions sont revus. Une de leurs modélisations et la forme d'implémentation associée sont alors décrites et la sensibilité de la modélisation à ses paramètres est étudiée. Pour finir, les quantités mesurables et leurs intérêts respectifs sont présentés.

1.1 Cinématique et section efficace

1.1.1 Définition des variables cinématiques

Le processus de Diffusion Compton Virtuelle (VCS) proprement dit est la diffusion d'un photon virtuel sur un proton donnant en état final un photon et un proton :

$$\gamma^* + p \rightarrow \gamma' + p'. \quad (1.1)$$

Le photon virtuel γ^* est créé par la diffusion d'un lepton sur le proton, et le processus expérimental permettant d'atteindre le VCS s'écrit

$$l + p \rightarrow l' + \gamma' + p'. \quad (1.2)$$

Les notations adoptées pour les variables cinématiques sont définies sur la figure 1.1. Les quadri-vecteurs sont en caractères normaux, les vecteurs d'espace sont surmontés d'une

flèche, et les composantes temporelles sont affectées de l'indice 0. $h_{e(p)}$ et $h'_{e(p)}$ sont les hélicités des leptons (protons) incidents et diffusés : elles prennent les valeurs $\pm 1/2$. h et h' sont les hélicités des photons : elles peuvent prendre les valeurs $(-1, 0, 1)$ et $(-1, 1)$ respectivement.

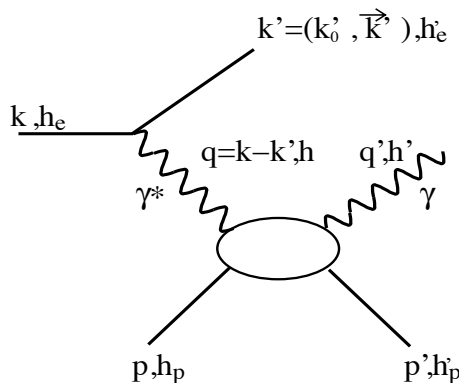


FIG. 1.1 – Impulsions et hélicités du DVCS

Il est utile de définir les quantités invariantes suivantes :

$$Q^2 := -q^2, \quad Q^2 > 0,$$

qui est la virtualité du photon échangé,

$$s := (p + q)^2 = (p' + q')^2,$$

qui est l'énergie disponible dans le centre de masse (cm) proton-photon défini par

$$\vec{q} + \vec{p} = \vec{0} = \vec{p}' + \vec{q}', \quad (1.3)$$

et

$$x_B := \frac{Q^2}{2p \cdot q}$$

est la variable de Bjorken. Elle est comprise entre 0 et 1. La limite supérieure est fixée par son interprétation dans le cadre du modèle de parton [4]. Ces trois variables sont reliées par l'équation

$$s = M^2 + Q^2 \left(\frac{1}{x_B} - 1 \right).$$

Le taux de polarisation linéaire dans le plan transverse du photon virtuel est

$$\epsilon := \frac{\left(|\vec{k}| + |\vec{k}'| \right)^2 - |\vec{q}|^2}{\left(|\vec{k}| + |\vec{k}'| \right)^2 + |\vec{q}|^2}.$$

Le transfert entre les deux photons, qui pour la réaction (1.1) est aussi égal au transfert hadronique Δ^2 entre les deux protons est défini par

$$t := (q' - q)^2 = \Delta^2 := (p' - p)^2. \quad (1.4)$$

Il faut bien noter que t est négatif et ne peut s'annuler que dans la limite où la virtualité du photon échangé est nulle.

Dans la suite, les expériences considérées sont à cible fixe de protons. Le faisceau de lepton est supposé être ultra relativiste de telle sorte que la masse des leptons sera négligée.

Trois référentiels sont utiles :

- L'étude de la cinématique dans le référentiel du laboratoire (lab ou labo) est naturelle dans le cadre expérimental. Les variables dans ce référentiel sont repérées par l'indice *lab*.
- La définition des variables dans le référentiel du centre de masse (1.3) trouve sa justification dans l'étude théorique du processus Compton proprement dit. Les variables dans ce référentiel sont notées sans indice.
- Pour la simulation, il est aussi utile de se référer à un repère intermédiaire (virt) dans lequel le proton initial est au repos comme dans le laboratoire, mais où l'axe z porte le photon virtuel. Les variables dans ce référentiel sont repérées par l'indice *virt*.

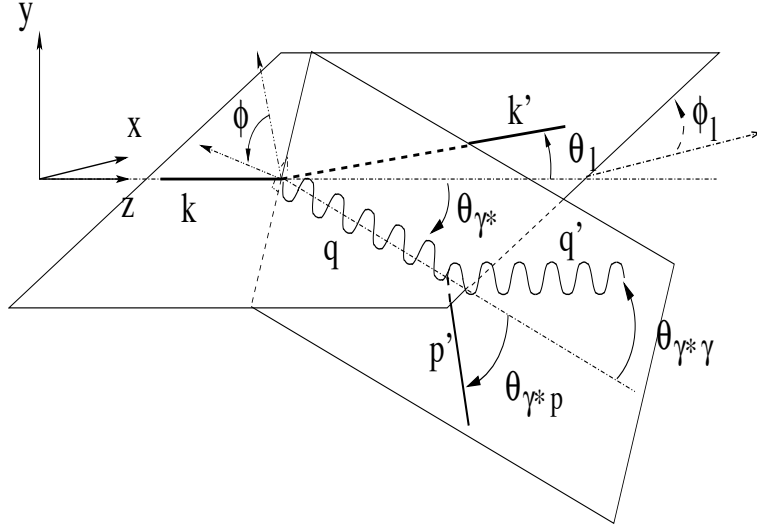


FIG. 1.2 – Le référentiel du laboratoire

Dans le référentiel du laboratoire, représenté sur la figure 1.2, les quadri-impulsions prennent la forme suivante :

$$k_{lab} = \begin{pmatrix} k_{lab}^0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{lab}^0 \end{pmatrix}, \quad p_{lab} = \begin{pmatrix} M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$k'_{lab} = \begin{pmatrix} k_{lab}^0 \\ k_{lab}^0 \cos \phi_l \sin \theta_l \\ k_{lab}^0 \sin \phi_l \sin \theta_l \\ k_{lab}^0 \cos \theta_l \end{pmatrix}, \quad q_{lab} = \begin{pmatrix} \nu \\ |\vec{q}_{lab}| \cos \phi_l \sin \theta_{\gamma^*} \\ |\vec{q}_{lab}| \sin \phi_l \sin \theta_{\gamma^*} \\ |\vec{q}_{lab}| \cos \theta_{\gamma^*} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

avec $\vec{q}_{lab} = \vec{k}_{lab} - \vec{k}'_{lab}$ et $\nu = k_{lab}^0 - k'_{lab}{}^0$.

Les quadri-impulsions p'_{lab} et q'_{lab} s'écrivent plus facilement par composition de leurs composantes dans le référentiel (*virt*) avec une matrice de rotation R_{γ^*} :

$$R_{\gamma^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_l \cos \theta_{\gamma^*} & -\sin \phi_l & \cos \phi_l \sin \theta_{\gamma^*} \\ 0 & \sin \phi_l \cos \theta_{\gamma^*} & \cos \phi_l & \sin \phi_l \sin \theta_{\gamma^*} \\ 0 & -\sin \theta_{\gamma^*} & 0 & \cos \theta_{\gamma^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} q'_{lab} &= R_{\gamma^*} \cdot q'_{virt} \\ p'_{lab} &= R_{\gamma^*} \cdot p'_{virt} \end{aligned}$$

Les variables de Mandelstam s et t , et les autres invariants prennent dans ce repère la forme suivante :

$$Q^2 = 4k_{lab}^0 k'_{lab}{}^0 \sin^2 \frac{\theta_l}{2},$$

$$s = -Q^2 + M^2 + 2M\nu,$$

$$x_B = \frac{Q^2}{2M\nu},$$

$$\epsilon = \left(1 + 2 \frac{|\vec{q}_{lab}|^2}{Q^2} \tan^2 \frac{\theta_l}{2} \right)^{-1} \text{ et}$$

$$t = -Q^2 - 2q'_{lab}{}^0 (\nu - |\vec{q}_{lab}| \cos \theta_{\gamma^*}) = 2M^2 - 2Mp'^0. \quad (1.7)$$

Le référentiel du photon virtuel et le référentiel du labo ne diffèrent que par une rotation spatiale, les énergies et modules des impulsions sont invariants.

L'angle ϕ_h est représenté sur la figure 1.3 pour mettre en évidence l'arbitraire dans le choix de l'orientation du plan de référence. En pratique, comme il sera expliqué plus tard, il est fixé à 0. Dans le référentiel du photon virtuel, les quadri-impulsions prennent la forme :

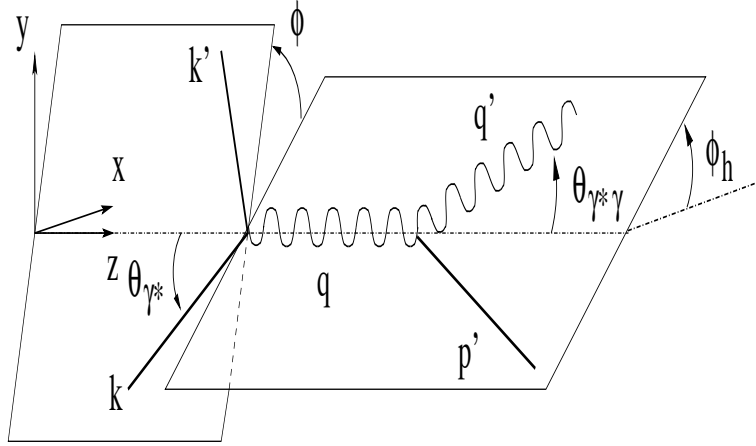


FIG. 1.3 – Le référentiel du photon virtuel

$$\begin{aligned}
 k_{virt} &= \begin{pmatrix} k_{lab}^0 \\ k_{lab}^0 \cos \phi \sin \theta_{\gamma^*} \\ k_{lab}^0 \sin \phi \sin \theta_{\gamma^*} \\ k_{lab}^0 \cos \theta_{\gamma^*} \end{pmatrix}, & p_{virt} &= \begin{pmatrix} M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 k'_{virt} &= \begin{pmatrix} k_{lab}^{\prime 0} \\ k_{lab}^{\prime 0} \cos \phi \sin(\theta_{\gamma^*} + \theta_l) \\ k_{lab}^{\prime 0} \sin \phi \sin(\theta_{\gamma^*} + \theta_l) \\ k_{lab}^{\prime 0} \cos(\theta_{\gamma^*} + \theta_l) \end{pmatrix}, & q_{virt} &= \begin{pmatrix} \nu \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{Q}_{lab}| \end{pmatrix}, \\
 q'_{virt} &= \begin{pmatrix} q_{lab}^{\prime 0} \\ q_{lab}^{\prime 0} \sin \theta_{\gamma^* \gamma} \\ 0 \\ q_{lab}^{\prime 0} \cos \theta_{\gamma^* \gamma} \end{pmatrix}, & p'_{virt} &= \begin{pmatrix} E_{p'lab} \\ |\vec{p}'_{lab}| \sin \theta_{\gamma^* p} \\ 0 \\ |\vec{p}'_{lab}| \cos \theta_{\gamma^* p} \end{pmatrix}. \tag{1.8}
 \end{aligned}$$

Pour passer du référentiel (*virt*) au référentiel du centre de masse, il suffit d'opérer un boost de Lorentz dans la direction z . Les angles longitudinaux changent de valeurs, mais les angles azimutaux, comme l'angle ϕ , restent inchangés. Dans le référentiel (*virt*), les paramètres de ce boost s'écrivent :

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{|\vec{Q}_{lab}|}{\nu + M} \end{pmatrix} \text{ et } \gamma = \frac{\nu + M}{\sqrt{s}}. \tag{1.9}$$

Dans ce référentiel, les quadri-impulsions ont pour composantes :

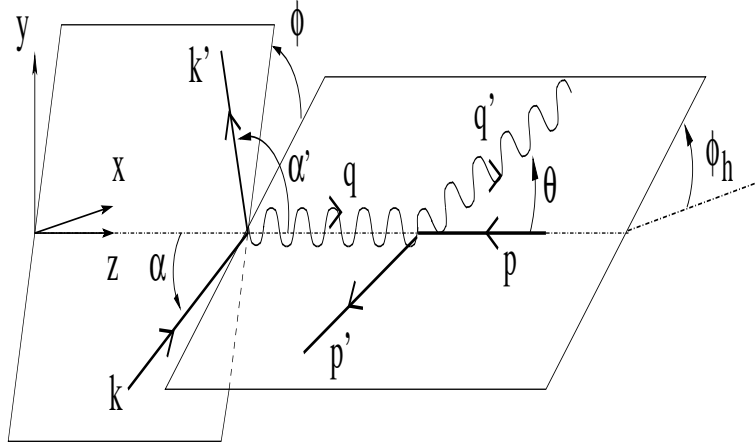


FIG. 1.4 – Le référentiel du centre de masse proton-photon

$$\begin{aligned}
 k &= \begin{pmatrix} k^0 \\ k^0 \cos \phi \sin \alpha \\ k^0 \sin \phi \sin \alpha \\ k^0 \cos \alpha \end{pmatrix}, & p &= \begin{pmatrix} p^0 \\ 0 \\ 0 \\ -|\vec{p}| \end{pmatrix}, \\
 k' &= \begin{pmatrix} k'^0 \\ k'^0 \cos \phi \sin \alpha' \\ k'^0 \sin \phi \sin \alpha' \\ k'^0 \cos \alpha' \end{pmatrix}, & q &= \begin{pmatrix} q^0 \\ 0 \\ 0 \\ |\vec{p}| \end{pmatrix}, \\
 q' &= \begin{pmatrix} q'^0 \\ q'^0 \sin \theta \\ 0 \\ q'^0 \cos \theta \end{pmatrix}, & p' &= \begin{pmatrix} p'^0 \\ -q'^0 \sin \theta \\ 0 \\ -q'^0 \cos \theta \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

La conservation de l'énergie et l'impulsion dans le centre de masse permettent d'écrire directement :

$$\begin{aligned}
 q^0 &= \frac{s-Q^2-M^2}{2\sqrt{s}}, & q'^0 &= \frac{s-M^2}{2\sqrt{s}}, \\
 p^0 &= \frac{s+Q^2+M^2}{2\sqrt{s}}, & p'^0 &= \frac{s+M^2}{2\sqrt{s}},
 \end{aligned}$$

$$|\vec{p}|^2 = Q^2 + q'^{02}. \tag{1.11}$$

Les lois de conservations conduisent aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin \frac{\alpha - \alpha'}{2} &= \frac{Q}{2\sqrt{k^0 k'^0}}, & \cos \frac{\alpha - \alpha'}{2} &= \frac{|\vec{p}|}{2\sqrt{k^0 k'^0}} \sqrt{\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}}, \\
\sin \frac{\alpha + \alpha'}{2} &= \frac{-Q}{2\sqrt{k^0 k'^0}} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}, & \cos \frac{\alpha + \alpha'}{2} &= \frac{q^0}{2\sqrt{k^0 k'^0}} \sqrt{\frac{2\epsilon}{1-\epsilon}}.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Les expressions pour les fonctions des demi différences s'obtiennent facilement à partir de la définition du taux ϵ de polarisation du photon échangé. Pour les demi sommes, il faut utiliser l'égalité (par exemple) :

$$\sin \frac{\alpha + \alpha'}{2} \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2} = -\frac{1}{2} (\cos \alpha - \cos \alpha')$$

Dans le repère du centre de masse, le vecteur de polarisation $\varepsilon(h)$ du photon virtuel dans la jauge de Lorentz s'écrit

$$\varepsilon(0) := \frac{1}{Q} \begin{pmatrix} |\vec{p}| \\ 0 \\ 0 \\ q^0 \end{pmatrix} \text{ et } \varepsilon(h) := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -h \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \text{ pour } h = \pm 1, \tag{1.13}$$

et le vecteur de polarisation $\varepsilon'(h')$ du photon de l'état final est

$$\varepsilon'(h') := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -h' \cos \theta \\ -i \\ h' \sin \theta \end{pmatrix} \text{ avec } h' = \pm 1. \tag{1.14}$$

1.1.2 Variables indépendantes, section efficace

Le processus VCS est déterminé par la donnée des quadri-impulsions définies précédemment. Vingt paramètres sont donc a priori nécessaires. Cependant, la connaissance de la masse des particules réduit ce nombre de paramètres à trois par particule, soit quinze en tout. Les lois de conservations fournissent un système de quatre équations indépendantes reliant ces paramètres, réduisant ce nombre à onze. Le faisceau incident de leptons a une direction donnée, ne laissant que l'énergie de ce faisceau comme paramètre, et le proton initial est au repos, donc complètement déterminé. Ces conditions initiales réduisent le nombre de paramètres de cinq unités et finalement le nombre minimal de paramètres nécessaire à la complète détermination du VCS est six. Le choix du jeu de variables indépendantes n'est évidemment pas unique.

Si ni le faisceau de leptons ni la cible ne sont polarisés transversalement au faisceau, comme ce sera le cas dans la suite, alors il n'existe pas d'orientation de référence dans le plan transverse au faisceau et l'angle azimutal de diffusion du lepton (ϕ_l dans le labo équivalent à ϕ_h dans le repère du photon virtuel) a une définition arbitraire. Ce paramètre n'est plus pertinent, ce qui amène à cinq le nombre de variables indépendantes contraignant le VCS.

Pour une étude expérimentale, dans le cadre d'une simulation par exemple, il est préférable d'utiliser les variables du laboratoire, c'est à dire

$$\left(k_{lab}^0, k_{lab}^{\prime 0}, \theta_l, \theta_{\gamma^*\gamma}, \phi\right) \text{ ou} \\ \left(k_{lab}^0, \Omega_{lab}^{k'}, \Omega_{lab}^{\gamma^*\gamma}\right), \quad (1.15)$$

où Ω est l'angle solide tel que $d\Omega = d\cos\theta d\phi$. En revanche, pour une étude théorique, les variables suivantes auront plus de sens :

$$\left(Q^2, x_B, k^0, t, \phi\right). \quad (1.16)$$

La section efficace du VCS est

$$d\sigma = \frac{d\Phi}{F} \left| T_{h'h_e'h_p'h_e h_p}^{VCS} \right|^2, \quad (1.17)$$

où le facteur de flux F du processus s'écrit

$$F := 4\sqrt{(k \cdot p)^2 - m_l^2 M^2}, \quad (1.18)$$

et où, en choisissant la normalisation des états

$$\langle p' | p \rangle = 2p^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') (2\pi)^3, \quad (1.19)$$

l'espace des phases pour le VCS s'écrit :

$$d^9\Phi := \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2k'^0} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3 2p'^0} \frac{d^3\vec{q}'}{(2\pi)^3 2q'^0} (2\pi)^4 \delta^4(k + p - k' - p' - q'). \quad (1.20)$$

Cet espace des phases peut être réduit suivant le jeu de variables souhaité. Pour deux des jeux de variables (1.15) et (1.16) les espaces des phases s'écrivent

$$\frac{d^5\Phi}{dk_{lab}^0 d^2\Omega_{lab}^{k'} d^2\Omega_{lab}^{\gamma^*\gamma}} = \frac{1}{8} \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{k_{lab}^{\prime 0} q'}{M + \nu - |\vec{q}'| \cos\theta_{\gamma^*\gamma}}, \quad (1.21)$$

$$\frac{d^4\Phi}{dQ^2 dx_B dt d\phi} = \frac{1}{32} \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_{lab}^0 M x_B} \left(1 + \frac{4M^2 x_B^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.22)$$

La réaction VCS (1.1) ne peut pas être mesurée directement car s'y ajoute de façon cohérente l'amplitude du processus appelé Bethe-Heitler dont l'état final est le même que celui du VCS, mais dans lequel le photon final est émis par la ligne leptonique (Bremsstrahlung). Les graphes représentant ce processus sont dessinés sur la figure 1.5. Finalement, l'amplitude d'électro-production d'un photon s'écrira

$$T_{h'h_e'h_p'h_e h_p}^{ee'\gamma} = T_{h'h_e'h_p'h_e h_p}^{BH} + T_{h'h_e'h_p'h_e h_p}^{VCS}.$$

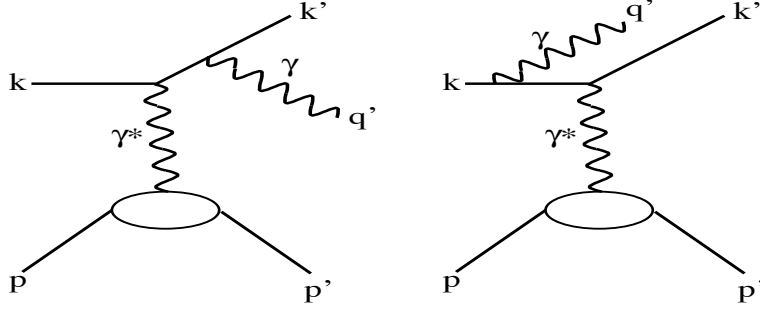


FIG. 1.5 – Les graphes du processus Bethe-Heitler associés au VCS

1.2 Amplitudes VCS et Bethe-Heitler

A l'ordre le plus bas dans la charge électrique $|e| = \sqrt{4\pi/137}$, l'amplitude d'électro-production d'un photon s'écrit, en ignorant les hélicités pour alléger les formules :

$$T^{ee'\gamma} = T^{BH} + T^{VCS}$$

$$T^{BH} = -i \int d^4x \varepsilon'_\mu \langle k' | T \{ j_{em}^\mu(0) j_{em}^\nu(x) \} | k \rangle \frac{e^{i(p'-p) \cdot x}}{(p' - p)^2} \langle H_f(p') | J_\nu^{em}(0) | H_i(p) \rangle,$$

$$T^{VCS} = -i \int d^4x \varepsilon'_\mu \langle H_f(p') | T \{ J_{em}^\mu(0) J_{em}^\nu(x) \} | H_i(p) \rangle \frac{e^{i(k'-k) \cdot x}}{(k' - k)^2} \langle k' | j_\nu^{em}(0) | k \rangle,$$

où j_{em} et J_{em} sont respectivement les courants électro-magnétiques portés par les leptons et les hadrons, et où $H_f(p')$ et $H_i(p)$ sont les systèmes hadroniques initial et final pour l'instant encore non précisés. On vérifie bien que l'on passe de T^{BH} à T^{VCS} en échangeant simplement les leptons (k, k') et les hadrons (p, p').

Dans les cas où $H_{i,f}$ est un nucléon, le courant électro-magnétique porté par les hadrons s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle p' | J_\mu^{em}(0) | p \rangle &= |e| \bar{u}(p') \Gamma_\mu^{em}(p', p) u(p), \\ \Gamma_\mu^{em}(p', p) &= F_1^{p,n}(t) \gamma_\mu + i F_2^{p,n}(t) \frac{\sigma_{\mu\nu} (p' - p)^\nu}{2M}, \quad t = (p' - p)^2, \end{aligned}$$

où $F_{1,2}^{p,n}$ sont les facteurs de forme du proton ou du neutron ($F_1^p(0) = 1$, $F_1^n(0) = 0$, $F_2^p(0) = 2.79$, $F_2^n(0) = -1.93$). En utilisant le propagateur libre des leptons,

$$\langle 0 | T \{ \psi(0) \bar{\psi}(x) \} | 0 \rangle = i \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{e^{il \cdot x}}{\gamma \cdot l - m_l},$$

pour faire la réduction de Wick du produit ordonné $T \{ j_{em}^\mu(0) j_{em}^\nu(x) \}$, où le courant est $j_{em}^\mu(x) = e_l \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$ ($e_l = \pm |e|$), l'amplitude de Bethe-Heitler devient :

$$\begin{aligned} T^{BH} &= |e| e_l^2 \varepsilon_\mu^*(k') \bar{u}(k') \left[\gamma^\mu \frac{\gamma \cdot (k' + q') + m_l}{(k' + q')^2 - m_l^2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\gamma \cdot (k - q') + m_l}{(k - q')^2 - m_l^2} \gamma^\mu \right] u(k) \times \dots \\ &\quad \frac{1}{(p' - p)^2} \bar{u}(p') \Gamma_\nu^{em}(p', p) u(p). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Pour l'amplitude du VCS, le tenseur hadronique

$$H^{\mu\nu}(p', p) = -i \langle H_f(p') | \int d^4x e^{-iq \cdot x} T \{ J_{em}^\mu(0) J_{em}^\nu(x) | H_i(p) \rangle, \quad (1.24)$$

résume le contenu dynamique du VCS, et le facteur leptonique

$$P^\mu(k', k) = \frac{e_l}{(k' - k)^2} \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k),$$

contient le courant leptonique et le propagateur du photon virtuel, de sorte que l'amplitude du VCS devient :

$$T^{VCS} = \varepsilon_\mu^* H^{\mu\nu}(p', p) P_\nu(k', k). \quad (1.25)$$

1.2.1 Amplitudes d'hélicité

Le facteur leptonique P^α du VCS peut se décomposer sur les vecteurs de polarisation du photon virtuel (1.13). Les coefficients de la décomposition dépendent uniquement du taux de polarisation ϵ et des angles θ et ϕ définis en (1.10) :

$$P_{h'_e h_e}^\alpha = -\frac{e_l}{Q^2} \sum_{h=-1,0,1} C_{h'_e h_e}^h(\epsilon, \theta, \phi) \varepsilon^\alpha(h) \quad (1.26)$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} C_{h'_e h_e}^0 &= -\frac{Q}{\sqrt{1-\epsilon}} \sqrt{2\epsilon} \delta_{h'_e h_e}, \\ C_{h'_e h_e}^{-1} &= e^{i\phi} \frac{Q}{\sqrt{1-\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{2}} (2h_e \sqrt{1-\epsilon} - \sqrt{1+\epsilon}) \delta_{h'_e h_e}, \\ C_{h'_e h_e}^1 &= e^{-i\phi} \frac{Q}{\sqrt{1-\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{2}} (2h_e \sqrt{1-\epsilon} + \sqrt{1+\epsilon}) \delta_{h'_e h_e}. \end{cases} \quad (1.27)$$

Cette décomposition du facteur leptonique amène à introduire les amplitudes d'hélicité $M_{h' h'_p h h_p}$ du processus (1.1) :

$$M_{h' h'_p h h_p} = \varepsilon_\alpha(h) \varepsilon_\beta^*(h') H_{h'_p h_p}^{\alpha\beta}. \quad (1.28)$$

L'amplitude VCS s'écrit alors

$$T_{h' h'_p h'_e h_e h_p}^{VCS} = -\frac{e_l}{Q^2} \sum_{h=-1,0,1} C_{h'_e h_e}^h(\epsilon, \theta, \phi) M_{h' h'_p h h_p}. \quad (1.29)$$

Les amplitudes d'hélicité sont invariantes par parité, ce qui impose la relation :

$$M_{h' h'_p h h_p} = (-1)^{h'_p + h' + h_p + h - 1} M_{-h' -h'_p -h -h_p}. \quad (1.30)$$

Le nombre d'amplitudes indépendantes du processus VCS est donc de $2 * 2 * 3 * 2/2 = 12$.

1.2.2 Amplitude VCS dans la limite profondément inélastique : le DVCS

Pour commencer il est nécessaire de rappeler la définition de la limite profondément inélastique, encore appelée limite de Bjorken. L'énergie s et la virtualité Q^2 du photon échangé tendent toutes deux vers l'infini, mais leur quotient reste fini :

$$\left. \begin{array}{l} Q^2 \rightarrow \infty \\ s \rightarrow \infty \end{array} \right\} \frac{Q^2}{s} \text{ fini.} \quad (1.31)$$

Dans la limite de Bjorken le photon sonde la structure interne du nucléon à courte distance transverse. Dans ce régime cinématique, le VCS est appelé DVCS (de DeepVCS) pour en souligner la particularité.

Pour bien comprendre la limite de Bjorken, il est utile d'introduire les coordonnées sur le cône de lumière. Dans un repère où $P = (p + p')/2$ et q sont sur l'axe (Oz), P étant dirigé vers les z positifs, soient les vecteurs de Sudakov définis par

$$\tilde{p} = \frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } n = \frac{1}{\Lambda\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs satisfont :

$$\tilde{p}^2 = 0, \quad n^2 = 0, \quad \tilde{p} \cdot n = 1.$$

Notant a_{\perp} sa composante transverse par rapport à z , tout vecteur a peut se décomposer sur les vecteurs de Sudakov :

$$a^{\mu} = a^{+}\tilde{p}^{\mu} + a^{-}n^{\mu} + \tilde{a}_{\perp}^{\mu}, \quad (1.32)$$

où

$$\begin{cases} a^{+} &= a \cdot n, \\ a^{-} &= a \cdot \tilde{p}. \end{cases}$$

Après avoir fixé la normalisation de ces vecteurs par la composante $+$ de P : $P^{+} = \Lambda$, il est possible de récrire les quadri-impulsions des particules suivant la décomposition de Sudakov. La composante $+$ d'un vecteur est appelée composante longitudinale. P et q n'auront par définition pas de composantes transverses. En notant $P^2 = 2P^{+}P^{-} = M^2 - t/4 = \overline{M}^2$ il vient

$$P^{\mu} = \tilde{p} + \frac{\overline{M}^2}{2}n. \quad (1.33)$$

Partant du système

$$\begin{cases} Q^2 &= -2q^{+}q^{-}, \\ P \cdot q &= q^{-} + \overline{M}^2q^{+}/2, \end{cases}$$

on voit que q^+ vérifie une équation du second degrés dont la solution de signe négatif est

$$q^+ = \frac{P \cdot q}{\overline{M}^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\overline{M}^2 Q^2}{(P \cdot q)^2}} \right) = -2\xi'. \quad (1.34)$$

q^+ est négatif pour le choix d'orientation des vecteurs de Sudakov car il vaut $q^+ = q^0 + q^3$ dans le repère où q^3 est négatif. q^3 est de plus supérieur à q^0 car $q^2 < 0$. ξ' est ainsi par définition positif. Dans la limite de Bjorken, $P \cdot q \sim \nu$, donc $Q^2/(P \cdot q)^2 \rightarrow 0$ et l'on a

$$2\xi' \rightarrow \frac{Q^2}{2P \cdot q} \simeq \frac{x_B}{1 - x_B/2}. \quad (1.35)$$

La variable de Bjorken est limitée à 1, donc

$$0 < \xi' < 1.$$

L'impulsion du photon échangé s'écrit finalement

$$q^\mu = -2\xi' \tilde{p}^\mu + \frac{Q^2}{4\xi'} n^\mu. \quad (1.36)$$

Pour être complet, il faut aussi écrire les décompositions de Δ et q' ;

$$\Delta^\mu = -2\xi \tilde{p}^\mu + \xi \overline{M}^2 n^\mu + \vec{\Delta}_\perp^\mu, \quad (1.37)$$

où

$$\xi = \xi' \frac{Q^2 - t}{Q^2 + \overline{M}^2 4\xi'^2}. \quad (1.38)$$

Dans la limite de Bjorken pour un transfert t fini, ξ tend vers ξ' . L'impulsion du photon réel s'obtient par soustraction de q et Δ :

$$q'^\mu = -2(\xi' - \xi) \tilde{p}^\mu + \left(\frac{Q^2}{4\xi'} - \xi \overline{M}^2 \right) n^\mu - \vec{\Delta}_\perp^\mu. \quad (1.39)$$

Dans tout repère, il est inversement possible d'écrire les vecteurs de Sudakov à partir de q et P :

$$\begin{cases} n &= \left(\frac{Q^2}{4\xi'} + \xi' \overline{M}^2 \right)^{-1} (2\xi' P + q), \\ \tilde{p} &= \left(\frac{Q^2}{4\xi'} + \xi' \overline{M}^2 \right)^{-1} \left(\frac{Q^2}{4\xi'} P - \frac{\overline{M}^2}{2} q \right). \end{cases} \quad (1.40)$$

Tout ce travail de traduction des variables dans le repère de Sudakov facilite l'étude du tenseur hadronique VCS dans la limite de Bjorken. Dans son expression

$$H_{h_p h_p}^{\mu\nu} = -i \int d^4 y e^{-i q y} \langle p', h_p' | T \{ J_{em}^\mu(0) J_{em}^\nu(y) \} | p, h_p \rangle,$$

l'argument complexe de l'exponentielle s'écrit

$$q \cdot y = -2\xi' y^- + \frac{Q^2}{4\xi'} y^+.$$

La région d'intégration qui contribuera est donnée par $y^- \sim 1/\xi'$ et $y^+ \sim \xi'/Q^2$. En effet des oscillations rapides de l'exponentielle complexe annule toute autre contribution. Pour une séparation y de genre espace, le produit retardé, proportionnel au commutateur contenu dans le T-produit s'annule. Le terme résiduel dans le T-produit s'annule pour les q du genre espace. Nous avons donc $y^2 > 0$ soit $1/Q^2 \sim 2y^+y^- > \bar{y}_\perp^2 > 0$. Dans la limite de Bjorken, l'intégrale sur y_\perp porte donc sur une distance en $1/Q^2 \sim 0$. En conclusion, dans la limite de Bjorken, l'intégration ne dépend que de la variable y^- , les autres composantes étant réduites à un intervalle nul

$$y^+ \sim 0 \quad \text{et} \quad y^\perp \sim 0.$$

Or $y^2 = 2y^+y^- - \bar{y}_\perp^2 \sim 0$ donc la région qui contribue à l'intégrale se trouve autour du cône de lumière $y^2 = 0$. Le cône de lumière est de mesure nulle dans l'espace \mathfrak{R}^4 , donc seules les fonctions à intégrer singulières sur le cône de lumière fourniront une contribution non nulle à l'intégrale. Afin de trouver les parties singulières de la fonction à intégrer, le développement de Taylor en produit d'opérateurs (Operator Product Expansion, OPE[5]) sur le cône de lumière est l'outil approprié.

1.2.3 Twist et factorisation

L'OPE consiste en un développement de Taylor de l'opérateur $J_{em}^\mu(0)J_{em}^\nu(y)$ de l'expression (1.24) autour de $y^2 = 0$ (voir par exemple la référence [6]) :

$$J_{em}^\mu(0)J_{em}^\nu(y)_{y^2 \rightarrow 0} \sim \sum_{n,\alpha} C_{n,\alpha}^{\mu\nu}(y^2) y_{\mu_1} y_{\mu_2} \cdots y_{\mu_n} O_{n,\alpha}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}(0). \quad (1.41)$$

Dans les coefficients complexes $C_{n,\alpha}^{\mu\nu}(y^2)$, qui sont des nombres, sont regroupées les dépendances en y^2 de l'opérateur :

$$C_{n,\alpha}^{\mu\nu}(y^2)_{y^2 \rightarrow 0} \sim (y^2)^{(d_{n,\alpha} - n - 2)/2}, \quad (1.42)$$

où $d_{n,\alpha}$ est la dimension en masse de l'opérateur non singulier $O_{n,\alpha}^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}(0)$ et n la dimension de sa représentation dans le groupe de Lorentz homogène, ou spin. Les opérateurs dominants près du cône de lumière sont ceux pour lesquels la quantité

$$twist = d_{n,\alpha} - n$$

est la plus petite. L'interprétation physique du twist devient plus claire au regard de la table 1.1 qui présente les caractéristiques des champs de fermion ψ , du tenseur de gluon $G_{\mu\nu}$ et de l'opérateur de dérivation covariante $D^\mu = \partial^\mu - igA^\mu$, où A^μ est le champs de gluon. Le plus petit twist est 2. Il existe une infinité d'opérateurs de twist 2 bilinéaires en

	ψ	$G_{\mu\nu}$	D_μ
d	$3/2$	2	1
n	$1/2$	1	1
t	1	1	0

TAB. 1.1 – Dimension en masse, spin et twist de quelques opérateurs courants.

champs de quarks, dont ceux de plus basse dimension sont :

$$O_{V,q}^\mu = \bar{\psi}_q \gamma^\mu \psi_q \quad \text{et} \quad O_{A,q}^\mu = \bar{\psi}_q \gamma^\mu \gamma^5 \psi_q. \quad (1.43)$$

Les autres s'obtiennent en insérant autant d'opérateurs dérivation totale D^μ qu'il faut pour une dimension donnée. Les opérateurs de gluons de twist 2 sont obtenus de la même façon. Pris entre deux nucléons, les opérateurs de twist 2 pour les champs de quarks et de gluons sont représentés sur la figure 1.6.

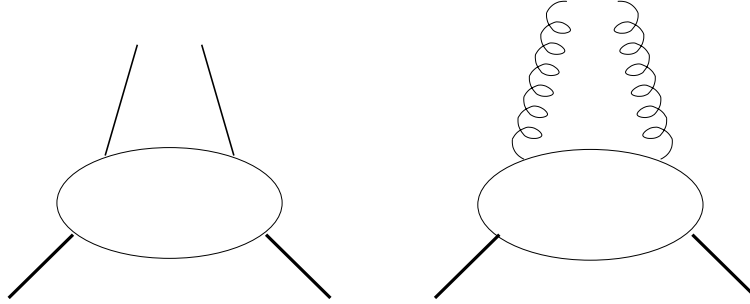


FIG. 1.6 – Représentation des opérateurs de quarks et de gluons de twist 2 et de plus basse dimension.

Les opérateurs de twist supérieur sont construits de façon similaire, et la figure 1.7 présente deux opérateurs de twist 3 et 4.

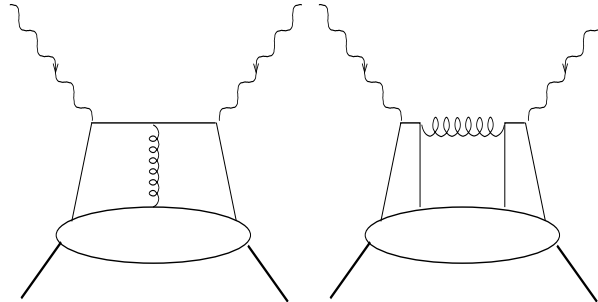


FIG. 1.7 – Représentation de deux opérateurs de twist 3 et 4.

Les facteurs $C_n^{\mu\nu}(y^2)$ sont obtenus par le calcul des graphes de Feynman associés. Ils peuvent être calculés à partir des éléments de matrice de quarks, et ont un développement

en α_s . La figure 1.8 montre ces graphes pour les deux premiers ordres en α_s du twist 2. Les graphes croisés associés à 1a, 1b, 1c et 1d ne sont pas représentés.

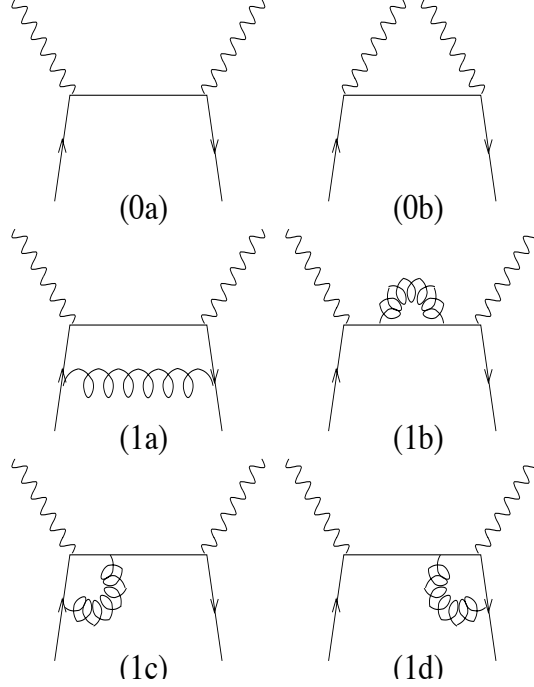


FIG. 1.8 – Graphes de Feynman des coefficients $C_q^{\mu\nu}$ aux ordres α_s^0 et α_s^1 .

Les boucles de gluon des graphes 1a 1b, 1c 1d sont divergentes dans l’infra rouge (IR : c’est à dire pour les basses impulsions de l’intégrale de boucle). Cependant, il est possible de déplacer les divergences IR, donc les parties non perturbatives de ces coefficients, dans l’opérateur associé. Ce dernier devient donc dépendant de l’échelle à laquelle il est sondé, c’est à dire Q^2 et regroupe toutes les composantes non perturbatives. Le tenseur est donc séparé en deux parties, l’une dite “dure”, correspondant à la diffusion du photon, l’autre dite “molle” dans laquelle se trouve toute la physique non perturbative. La figure 1.9 schématise graphiquement la situation. Pour tous les opérateurs de twist 2 il est possible de séparer ces deux composantes. Les opérateurs de twist 2 ont la même partie perturbative qu’il est possible de regrouper en un facteur commun. L’ensemble des opérateurs non perturbatifs de twist 2 peut alors être sommé. Cette opération s’appelle la factorisation et a été démontrée pour le twist 2 à tous les ordres en α_s sous la condition (voir les références [7], [8], [9] et [10]) :

$$\begin{cases} Q^2 \rightarrow \infty \\ t \text{ fini} \end{cases}$$

Ce théorème de factorisation s’écrit

$$H^{\mu\nu} = \sum_q \int_{-1}^1 dx F_{q/p}(x, \xi, t, Q^2) C_q^{\mu\nu}(x, \xi, Q^2), \quad (1.44)$$

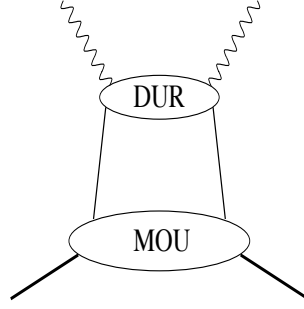


FIG. 1.9 – Factorisation du processus DVCS au twist 2. Dans la partie DURE se retrouvent les parties non divergentes des graphes de la figure 1.8.

où $F_{q/p}(x, \xi, t, Q^2)$ est une distribution de parton non diagonale, construite à partir de la sommation des opérateurs de twist 2 non perturbatifs, définie génériquement par

$$F_{q/p}(x, \xi, t, Q^2) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\lambda x} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \bar{\psi}_q\left(\frac{\lambda}{2}n\right) n \cdot \gamma (\gamma 5) \psi_q\left(-\frac{\lambda}{2}n\right) \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle,$$

et $C_q^{\mu\nu}(x, \xi, Q^2)$ est un coefficient qui peut être entièrement calculé dans le cadre de QCD perturbatif. A l'ordre le plus bas en α_s , c'est le diagramme de diffusion Compton sur le quark de la figure 1.8-0a et 0b.

1.2.4 Amplitude de twist 2 au premier ordre en α_s

Pour rendre ce théorème plus explicite, le calcul de ces coefficients au premier ordre (α_s)⁰ est un bon exercice. Il s'agit de calculer les diagrammes dit “handbag” (sac à main) des figures 1.8-0a et 1.8-0b. Les notations sont définies sur la figure 2.1 pour le diagramme direct.

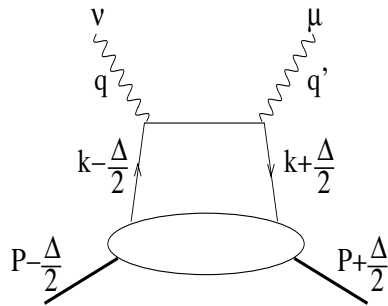


FIG. 1.10 – Graphe du handbag direct pour le DVCS

Partant du tenseur (1.24) et utilisant les propriétés de translations des champs

$$\langle P + \frac{\Delta}{2} | J(0) J(y) | P - \frac{\Delta}{2} \rangle = e^{i\frac{y}{2}\Delta} \langle P + \frac{\Delta}{2} | J(-\frac{y}{2}) J(\frac{y}{2}) | P - \frac{\Delta}{2} \rangle,$$

il vient

$$H^{\mu\nu} = -i \sum_q e_q^2 \int d^4y e^{-i(q-\frac{\Delta}{2})y} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| T \left\{ \bar{q}(-\frac{y}{2}) \gamma^\mu q(-\frac{y}{2}) \bar{q}(\frac{y}{2}) \gamma^\nu q(\frac{y}{2}) \right\} \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle.$$

Les deux graphes direct et croisé sont donnés par le théorème de Wick :

$$\begin{aligned} T \left\{ \bar{q}(-\frac{y}{2}) \gamma^\mu q(-\frac{y}{2}) \bar{q}(\frac{y}{2}) \gamma^\nu q(\frac{y}{2}) \right\} &= : \bar{q}(-\frac{y}{2}) \gamma^\mu q(-\frac{y}{2}) \bar{q}(\frac{y}{2}) \gamma^\nu q(\frac{y}{2}) : \\ &+ : \bar{q}(\frac{y}{2}) \gamma^\nu q(\frac{y}{2}) \bar{q}(-\frac{y}{2}) \gamma^\mu q(-\frac{y}{2}) :, \end{aligned}$$

où seule la partie la plus singulière du propagateur est retenue, le propagateur de quark libre, qui s'écrit

$$\underline{q(-\frac{y}{2}) \bar{q}(\frac{y}{2})} = i \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} e^{il \cdot y} \frac{1}{l \cdot \gamma - m}.$$

En négligeant la masse des quarks et en opérant un changement de variable d'intégration dans le propagateur du terme croisé, T-produit s'écrit alors

$$T \left\{ J_q^\mu(-\frac{y}{2}) J_q^\nu(\frac{y}{2}) \right\} \simeq ie_q^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} e^{il \cdot y} \frac{l_\rho}{l^2} \left\{ \bar{q}(-\frac{y}{2}) \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu q(\frac{y}{2}) - \bar{q}(\frac{y}{2}) \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu q(-\frac{y}{2}) \right\}.$$

On a vu que dans la limite de Bjorken il est possible de remplacer y^+ et y^\perp par 0 dans $J(y)$. On peut alors intégrer sur ces variables, ce qui donne un facteur $(2\pi)^3 \delta(l^- - Q^2/4\xi' + \xi \bar{M}^2/2) \delta^2(l_\perp + \Delta_\perp/2)$ et qui permet d'intégrer sur l^- et l^\perp . En négligeant les termes d'ordre Δ_\perp^2/Q^2 qui vont comme $t/Q^2 \ll 1$, le dénominateur du propagateur devient $l^2 \simeq 2l^+l^-$ et le numérateur $l_\rho \sim l^- n_\rho$. Il est alors utile d'introduire la variable

$$x = -(-l + q - \frac{\Delta}{2})^+ = l^+ + 2\xi' - \xi \simeq l^+ + \xi, \quad (1.45)$$

sur laquelle porte maintenant l'intégration en impulsion. Dans (1.45), nous avons utilisé $\xi' \sim \xi$, d'après (1.38) dans la limite de Bjorken. La composante l^+ du propagateur est comprise entre $P^+ - \frac{\Delta^+}{2} + q^+ \simeq 1 - \xi$ et $-P^+ - \frac{\Delta^+}{2} + q^+ = -1 - \xi$, donc les bornes de l'intégrale sur x sont -1 et 1. En opérant les changements de variables $x \rightarrow -x$ et $\lambda \rightarrow -\lambda$ dans le premier terme du T-produit, le tenseur hadronique s'écrit finalement

$$H^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 \int d\lambda \frac{dx}{2\pi} e^{ix\lambda} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \bar{q}(-\frac{\lambda}{2}n) \left(\frac{\gamma^\mu \gamma^+ \gamma^\nu}{x - \xi + i\epsilon} + \frac{\gamma^\nu \gamma^+ \gamma^\mu}{x + \xi - i\epsilon} \right) q(\frac{\lambda}{2}n) \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle. \quad (1.46)$$

Or on a les relations

$$\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu = S^{\mu\rho\nu\sigma} \gamma_\sigma + i\epsilon^{\mu\rho\nu\sigma} \gamma_\sigma \gamma^5, \quad (1.47)$$

$$\text{où } S^{\mu\rho\nu\sigma} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \quad \text{et } \epsilon^{0123} = +1.$$

Les parties symétriques des deux membres s'ajoutent alors que les parties antisymétriques se retranchent. Le tenseur hadronique prend alors la forme suivante

$$\begin{aligned}
H^{\mu\nu} = & \frac{1}{2} (\tilde{p}^\mu n^\nu + \tilde{p}^\nu n^\mu - g^{\mu\nu}) \sum_q e_q^2 \int dx \left(\frac{1}{x-\xi+i\epsilon} + \frac{1}{x+\xi-i\epsilon} \right) \\
& \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{ix\lambda} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \bar{q}(-\frac{\lambda}{2}n) \gamma \cdot n q(\frac{\lambda}{2}n) \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle \\
& + \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\rho\nu\sigma} \tilde{p}_\sigma n_\rho \sum_q e_q^2 \int dx \left(\frac{1}{x-\xi+i\epsilon} - \frac{1}{x+\xi-i\epsilon} \right) \\
& \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{ix\lambda} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \bar{q}(-\frac{\lambda}{2}n) \gamma \cdot n \gamma^5 q(\frac{\lambda}{2}n) \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

De l'opérateur $\bar{q}(-\frac{\lambda}{2}n) \gamma_\sigma q(\frac{\lambda}{2}n)$, seule la composante $\bar{q}(-\frac{\lambda}{2}n) \gamma \cdot n \tilde{p}_\sigma q(\frac{\lambda}{2}n)$ a été conservée car les autres s'annulent dans la limite de Bjorken.

En comparant avec l'équation (1.44), on voit qu'à cet ordre en α_s il existe deux coefficients $C_q^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
C_q^{\mu\nu}(x, \xi, Q^2) \Big|_{twist=2} &= \frac{e_q^2}{2} (\tilde{p}^\mu n^\nu + \tilde{p}^\nu n^\mu - g^{\mu\nu}) \left(\frac{1}{x-\xi+i\epsilon} + \frac{1}{x+\xi-i\epsilon} \right), \\
\tilde{C}_q^{\mu\nu}(x, \xi, Q^2) \Big|_{twist=2} &= \frac{e_q^2}{2} i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{p}_\rho n_\sigma \left(\frac{1}{x-\xi+i\epsilon} - \frac{1}{x+\xi-i\epsilon} \right).
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Les éléments de matrice qui apparaissent dans l'équation (1.48) ne dépendent que des variables $x, \xi, \Delta^2 = t$. Ils définissent les Distributions de Partons Généralisées (GPD) H, E, \tilde{H} et \tilde{E} par les développements

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{ix\lambda} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \bar{q}(-\frac{\lambda}{2}n) \gamma^\mu q(\frac{\lambda}{2}n) \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle &= \\
\bar{u}(P + \frac{\Delta}{2}) \left(H^{q/p}(x, \xi, t) \gamma^\mu + E^{q/p}(x, \xi, t) i \sigma^{\mu\nu} \frac{\Delta_\nu}{2M} \right) u(P - \frac{\Delta}{2}), \\
\int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{ix\lambda} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \bar{q}(-\frac{\lambda}{2}n) \gamma^\mu \gamma^5 q(\frac{\lambda}{2}n) \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle &= \\
\bar{u}(P + \frac{\Delta}{2}) \left(\tilde{H}^{q/p}(x, \xi, t) \gamma^\mu \gamma^5 + \tilde{E}^{q/p}(x, \xi, t) \frac{\Delta_\nu}{2M} \gamma^5 \right) u(P - \frac{\Delta}{2}).
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Ces distributions sont définies pour une saveur de quark q dans le proton p , d'où la notation q/p . Pour le DVCS sur le proton, la combinaison de distributions de partons généralisées qui intervient est

$$\frac{4}{9} F^{u/p} + \frac{1}{9} F^{d/p}. \tag{1.51}$$

Il est utile d'introduire les quantités (où p fait référence à la combinaison (1.51))

$$\begin{aligned}
\Gamma_\pm^p(\xi, t) &= \int_{-1}^1 dx C^\pm(x, \xi) \left(H^p(x, \xi, t) \gamma^+ + E^p(x, \xi, t) i \sigma^{+\nu} \frac{\Delta_\nu}{2M} \right), \\
\tilde{\Gamma}_\pm^p(\xi, t) &= \int_{-1}^1 dx C^\pm(x, \xi) \left(\tilde{H}^p(x, \xi, t) \gamma^+ \gamma^5 + \tilde{E}^p(x, \xi, t) \frac{\Delta^+}{2M} \gamma^5 \right),
\end{aligned} \tag{1.52}$$

qui sont des matrices de Dirac agissant sur les spineurs du nucléon. Elles dépendent des noyaux intégraux du handbag

$$C^\pm(x, \xi) = \left\{ \frac{1}{x - \xi + i\epsilon} \pm \frac{1}{x + \xi - i\epsilon} \right\}. \quad (1.53)$$

Avec ces définitions il est possible d'écrire

$$H^{\mu\nu} = e^2 \bar{u}(P + \frac{\Delta}{2}) \left(S^{\mu\nu} \Gamma_+^p(\xi, t) + A^{\mu\nu} \tilde{\Gamma}_-^p(\xi, t) \right) u(P - \frac{\Delta}{2}), \quad (1.54)$$

où

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\tilde{p}^\mu n^\nu + \tilde{p}^\nu n^\mu - g^{\mu\nu}) \quad \text{et} \quad A^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{p}_\rho n_\sigma. \quad (1.55)$$

1.2.5 Invariance de jauge et twist 3

Dans la suite, il sera principalement traité du tenseur de twist 2 au premier ordre en α_s . Le développement détaillé des twists supérieurs et des ordres supérieurs en α_s peut être trouvée dans les références [11], [12] et [8].

L'amplitude DVCS au twist 2 n'inclut pas les termes transverses d'ordre Δ_\perp/Q qui sont de twist supérieurs. Elle ne peut donc pas être invariante de jauge électromagnétique, les champs en présence comportant des composantes transverses. En effet, on a :

$$H^{\mu\nu} q_\nu = 0 \quad \text{et} \quad q'_\mu H^{\mu\nu} = -\Delta_{\perp\mu} H^{\mu\nu} \neq 0.$$

Dans le cas du DIS, l'invariance de jauge est assurée au twist 2 car $\Delta_\perp = 0$. Ce problème est donc spécifique au DVCS, et a des implications physiques très intéressantes, liées à l'invariance par translation des amplitudes. Selon la référence [12] la non invariance de jauge vient de ce que la dérivée totale, par rapport à la position absolue des deux positions des quarks, est non nulle et effectivement proportionnelle à Δ_\perp . Cela pose le problème de l'invariance par translation du système des deux quarks dans le nucléon. Dans le cas où ce système possède une extension transverse, conjuguée de l'impulsion transverse, sa translation dans un arrière plan de jauge QCD implique dynamiquement des interactions avec des gluons. C'est cette classe d'interactions de twist supérieurs qui est nécessaire au rétablissement de l'invariance de jauge. De nombreux articles traitent de ces twist 3 ([13],[14]).

D'un point de vue pratique, le rétablissement effectif de l'invariance de jauge suivra ici la prescription proposée référence [15]

$$H^{\mu\nu} \rightarrow H^{\mu\nu} + \tilde{p}^\mu \frac{\Delta_{\perp\rho}}{\tilde{p} \cdot q'} H^{\rho\nu},$$

qui est une recette et dont la justification est que le terme ajouté à l'amplitude est d'ordre relatif Δ_\perp/Q , donc bien équivalent à un twist supérieur. Il a été démontré a posteriori [16] qu'un certain type de twist 3 suffisant au rétablissement de l'invariance de jauge donne une formule de ce type.

1.3 Contenu physique du DVCS

Le tenseur hadronique DVCS au twist 2 est paramétré par quatre distributions de partons généralisées H , E , \tilde{H} et \tilde{E} qui dépendent des trois variables x , ξ et t . Ces nouvelles distributions ont des liens avec des quantités déjà mesurées comme les distributions de partons et les facteurs de forme. Mais elles sont porteuses d'une grande richesse d'informations nouvelles dans des domaines et des situations physiques encore non observés. De plus, la dépendance en t du tenseur hadronique peut fournir des informations sur la distribution spatiale des partons dans le nucléon.

1.3.1 Les Distributions de Partons Généralisées

Lors d'une diffusion "dure" la masse des quarks peut être négligée. La partie "dure" électromagnétique du handbag conserve donc l'hélicité des quarks. En revanche, dire que les GPD H , E , \tilde{H} et \tilde{E} , c'est à dire la partie molle hadronique, conservent l'hélicité des quarks est abusif.

Dans la limite $\Delta = 0$ (qui est non physique pour le DVCS) les équations (1.50) coïncident avec les distributions de partons de la diffusion inclusive profondément inélastique (DIS) :

$$\begin{aligned} H(x, \xi = 0, t = 0) &= q(x), \\ \tilde{H}(x, \xi = 0, t = 0) &= \Delta q(x). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Dans cette limite $\Delta = 0$, E et \tilde{E} ne contribuent pas du fait de leur coefficient proportionnel à $\Delta/2M$. E et \tilde{E} sont des quantités nouvelles par rapport aux distributions ordinaires.

Le support des GPD est $[-1, 1]$. Il se décompose en :

1. $x > \xi$ et $x < -\xi$:

Dans ces deux segments, les deux quarks de la figure 1.11 ont des impulsions longitudinales simultanément positives ou négatives. Ce sont donc deux quarks ou deux anti-quarks. L'interprétation des GPD en terme de distribution de partons est donc proche de celle du DIS, mise à part l'asymétrie $p' \neq p$. Qualitativement il est possible d'interpréter les GPD comme décrivant la réaction du nucléon à la séquence d'opérations suivante :

- (a) sélection d'un quark de fraction d'impulsion $x + \xi$ dans le nucléon,
- (b) modification de la fraction d'impulsion du quark de $x + \xi$ à $x - \xi$ par la diffusion Compton,
- (c) ré-insertion du quark dans le nucléon avec la fraction d'impulsion $x - \xi$.

Dans le cas du DVCS, l'outil qui permet de sélectionner et de modifier le quark est la partie électromagnétique dure. Mais les GPD ont une définition générale, indépendante du processus.

2. $-\xi < x < \xi$:

Dans cette région, l'un des partons a une impulsion négative, l'autre positive, formant une association quark-antiquark de type mésonique. Les GPD contiennent donc des informations sur la *distribution de mésons dans le nucléon*.

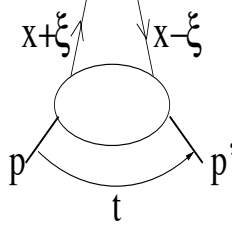


FIG. 1.11 – Représentation schématique des GPD.

Les moments de Mellin d'ordre 0 des GPD relient celles-ci aux facteurs de forme élastiques du nucléon. En effet, en intégrant la dépendance en x des GPD sur leur support $[-1, 1]$ (ou de façon équivalente sur $[-\infty, \infty]$), l'exponentielle $e^{ix\lambda}$ des équations de (1.50) donne une fonction $\delta(\lambda)$ qui permet d'intégrer sur λ , ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx \frac{d\lambda}{2\pi} e^{ix\lambda} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \bar{q}\left(-\frac{\lambda}{2}n\right) \gamma^\mu q\left(\frac{\lambda}{2}n\right) \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle &= \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \bar{q}(0) \gamma^\mu q(0) \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle \\ &= \bar{u}\left(P + \frac{\Delta}{2}\right) \left(F_1^{q/p}(t) \gamma^\mu + F_2^{q/p}(t) i\sigma^{\mu\nu} \frac{\Delta_\nu}{2M} \right) u\left(P - \frac{\Delta}{2}\right), \\ \int_{-1}^1 dx \frac{d\lambda}{2\pi} e^{ix\lambda} \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \bar{q}\left(-\frac{\lambda}{2}n\right) \gamma^\mu \gamma^5 q\left(\frac{\lambda}{2}n\right) \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle &= \left\langle P + \frac{\Delta}{2} \left| \bar{q}(0) \gamma^\mu \gamma^5 q(0) \right| P - \frac{\Delta}{2} \right\rangle \\ &= \bar{u}\left(P + \frac{\Delta}{2}\right) \left(g_A^{q/p}(t) \gamma^\mu \gamma^5 + h_A^{q/p}(t) \frac{\Delta^\mu}{2M} \gamma^5 \right) u\left(P - \frac{\Delta}{2}\right). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Il peut paraître étonnant que la dépendance en ξ disparaisse lors de l'intégration sur x . Cependant il faut remarquer que quelque soit ξ , l'intégrale couvre pour les deux partons l'ensemble de leur domaine cinématique permis, et il est normal que la dépendance en ξ disparaisse. Les relations que l'on obtient à partir de (1.57) et de l'analogie pour la partie axiale sont

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx H^{q/p}(x, \xi, t) &= F_1^{q/p}(t), \\ \int_{-1}^1 dx E^{q/p}(x, \xi, t) &= F_2^{q/p}(t), \\ \int_{-1}^1 dx \tilde{H}^{q/p}(x, \xi, t) &= g_A^{q/p}(t), \\ \int_{-1}^1 dx \tilde{E}^{q/p}(x, \xi, t) &= h_A^{q/p}(t), \end{aligned} \quad (1.58)$$

où $F_1^{q/p}(t)$ et $F_2^{q/p}(t)$ sont les facteurs de forme électromagnétiques du proton pour une saveur de quark donnée et $g_A^{q/p}(t)$ et $h_A^{q/p}(t)$ les facteurs de forme axial vecteur et pseudo scalaire du proton.

Le lien entre les moments de Mellin d'ordre n des GPD et les opérateurs de twist 2 construits avec n opérateurs de dérivation à partir des opérateurs définis dans l'équation (1.43) implique les propriétés polynomiales suivantes ([17],[18]) :

$$\int_{-1}^1 dx \left| \frac{x^{2n}}{x^{2n-1}} \right. \quad H^q(x, \xi, t) = h_0^{q(2n)}(t) + \xi^2 h_2^{q(2n)}(t) + \dots + \xi^{2(n-1)} h_{2(n-1)}^{q(2n)}(t) + \xi^{2n} h_{2n}^{q(2n)}(t), \quad (1.59)$$

$$\int_{-1}^1 dx \left| \frac{x^{2n}}{x^{2n-1}} \right. \quad E^q(x, \xi, t) = e_0^{q(2n)}(t) + \xi^2 e_2^{q(2n)}(t) + \dots + \xi^{2(n-1)} e_{2(n-1)}^{q(2n)}(t) + \xi^{2n} e_{2n}^{q(2n)}(t). \quad (1.60)$$

Les conditions polynomiales sont les mêmes pour les moments d'ordre $2n$ et $2n - 1$ par symétrie de renversement du temps. Les coefficients d'ordre le plus élevé pour H et E sont opposés en vertu du spin 1/2 du nucléon [19] :

$$h_{2n}^{q(2n)}(t) = -e_{2n}^{q(2n)}(t). \quad (1.61)$$

Ces propriétés appelées *conditions de polynomialité* peuvent sembler un peu abstraites, mais elles seront d'une grande utilité pour contraindre les modèles de GPD.

Pour en finir avec les principales propriétés des GPD, il faut mentionner la *règle de somme de Ji* [18], qui relie les seconds moments de H^q et E^q à la contribution du quark q au moment angulaire des quarks dans le nucléon :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx x (H^q(x, \xi, t=0) + E^q(x, \xi, t=0)) = J^q. \quad (1.62)$$

Dans le cadre de la crise du spin, où les différentes contributions au spin du nucléon sont autant de quantités à mesurer indépendamment, cette règle de somme offre un moyen supplémentaire de compléter le puzzle.

1.3.2 Les distributions de partons transverses

La principale nouveauté du DVCS par rapport au DIS est l'apparition d'une seconde échelle t , indépendante de Q^2 . Dans le DIS t est nul. Dans tout ce qui précède, il a été fait peu état de cette variable, tous les calculs et le formalisme viennent des équivalents du DIS. Mais pour faire sortir une interprétation physique imagée du DVCS, il convient de s'y intéresser avec plus d'attention, en suivant les idées développées dans les références [20] et [21]. Les deux échelles indépendantes du DVCS ont une interprétation physique :

- Q^2 : c'est l'échelle "dure". Dans la limite de Bjorken elle impose que la *séparation transverse* entre les deux points de couplage électromagnétique soient de l'ordre de $1/Q$. Le photon virtuel réduit l'action du handbag à une très petite distance transverse dans le nucléon.
- t ou Δ_\perp : c'est l'échelle molle. Elle est la conjuguée de Fourier de la *distance transverse* r_\perp entre le centre du "système" nucléon et les points de couplage électromagnétique.

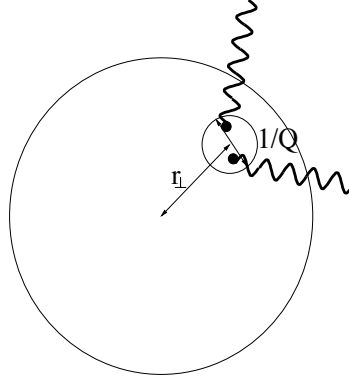


FIG. 1.12 – Représentation des deux échelles Q^2 et t dans le plan transverse.

La figure 1.12 donne une image de la situation dans le plan transverse. Dans la limite où $\xi = 0$, les GPD peuvent être interprétées comme des transformés de Fourier de distributions de quarks dépendant à la fois de la fraction d'impulsion du quark x et de la position transverse r_\perp du quark par rapport au centre de masse du nucléon :

$$GPD(x, \xi = 0, -\vec{\Delta}_\perp^2) = \int d^2\vec{r}_\perp e^{i\vec{\Delta}_\perp \cdot \vec{r}_\perp} q(x, \vec{r}_\perp).$$

Les distributions du type de $q(x, \vec{r}_\perp)$ ouvrent un champs d'exploration du nucléon encore vierge et très prometteur.

1.3.3 Les distributions de gluons généralisées

La contribution des gluons de la figure 1.6 au processus DVCS n'a pas été prise en compte car elle est d'ordre α_s par rapport à la contribution des quarks. Cependant cette contribution peut devenir dominante dans la région des très petits x_B . Cette remarque ne vient pas d'un parallèle avec le DIS. Un tel parallèle serait faux car on a vu que les distributions sont intégrées sur tout le domaine en impulsion longitudinale, et ne sont pas prises au point $x \sim x_B$ comme dans le DIS. Cependant, pour x_B grand, la variable $\xi \sim x_B/2$ est grande, et quelque soit la variable x , l'une des deux fractions d'impulsion $x + \xi$ et $x - \xi$ de la figure 1.11, où les quarks sont maintenant des gluons, sera grande. La contribution correspondante pour la distribution de gluons généralisée sera donc très réduite. En revanche, pour ξ très petit, les gluons donneront sur une partie du domaine d'intégration en x une grande contribution qui pourra compenser le facteur α_s .

Dans la suite, il ne sera plus traité des distributions de gluons et les estimations ne les prendront pas en compte. Pour les petits x_B , de l'ordre de qq 10^{-2} , les résultats des calculs de DVCS seront donc sous estimés.